SOLUCIONES DEL 1ER PARCIAL

Problem. Determine y bosqueje la convolución de las señales

$$x(t) = \begin{cases} t+1, & 0 \le t \le 1 \\ 2-t, & 1 < t \le 2 \\ 0, & otro\,valor \end{cases}$$

y

$$h(t) = \delta(t+2) + 2\delta(t+1)$$

Para $t < -2$, $x(t) * h(t) = 0$

Para $-1 > t \ge -2$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda+1)\,\delta(-\lambda+t+2)\,d\lambda = (t+2+1)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-\lambda+t+2)\,d\lambda = t+3$$

Observe que se está aprovechando la propiedad de selección de la función delta, y debido a esto, no es necesario preocuparse por los límites de integración

Para $0 \ge t \ge -1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\lambda+1)\,2\delta(-\lambda+t+1)\,d\lambda + \int_{-\infty}^{\infty} (2-\lambda)\,\delta(-\lambda+t+2)\,d\lambda =$$

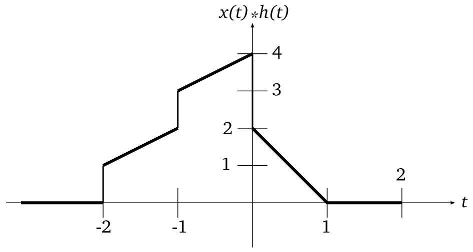
$$2(t+1+1)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-\lambda+t+1)\,d\lambda + (2-t-2)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-\lambda+t+2)\,d\lambda = t+4$$

Para $1 \ge t \ge 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (2-\lambda)\,2\delta(-\lambda+t+1)\,d\lambda = 2(2-t-1)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(-\lambda+t+1)\,d\lambda = 2-2t$$

Para $t > 1$, $x(t) * h(t) = 0$. La solución es:

$$x(t) * h(t) = \begin{cases} 0, & t < -2 \\ t+3, & -1 > t \ge -2 \\ t+4, & 0 \ge t \ge -1 \\ 2-2t, & 1 \ge t \ge 0 \\ 0 & t > 1 \end{cases}$$



Una forma más elegante de resolver este problema es utilizando las propiedades distributiva, y de selección de la convolución:

$$\begin{aligned}x(t) * h(t) &= x(t) * [\delta(t+2) + 2\delta(t+1)] = x(t) * \delta(t+2) + x(t) * 2\delta(t+1) \\ x(t) * h(t) &= x(t+2) + 2x(t+1)\end{aligned}$$

Esto significa que la salida es la suma de dos versiones de la señal $x(t)$, una desplazada dos unidades a la izquierda y otra aumentada el doble y desplazada una unidad a la izquierda.

Problem. Dada la señal de entrada $x(t) = e^{-\alpha t}u(t)$ y un sistema cuya respuesta al impulso es $h(t) = e^{-\beta t}u(t)$, calcular la respuesta para $\alpha \neq \beta$ y $\alpha = \beta$

La salida es

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) h(t-\lambda) d\lambda = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\lambda} e^{-\beta(t-\lambda)} d\lambda$$

$x(\lambda) = 0$ si $\lambda < 0$ y $h(t-\lambda) = 0$ si $t - \lambda < 0$ es decir si $\lambda > t$, luego, si $\alpha \neq \beta$,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha\lambda} e^{-\beta(t-\lambda)} d\lambda &= e^{-\beta t}\int_0^t e^{-\alpha\lambda} e^{\beta\lambda} d\lambda = e^{-\beta t}\int_0^t e^{\lambda(\beta-\alpha)} d\lambda \\ &= \frac{e^{-\beta t}}{\beta - \alpha}\left[e^{t(\beta-\alpha)} - 1\right] u(t) = \frac{e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}}{\beta - \alpha} u(t)\end{aligned}$$

Si $\alpha = \beta$,

$$\int_0^t e^{-\beta\lambda} e^{-\beta(t-\lambda)} d\lambda = \int_0^t e^{-\beta\lambda} e^{-\beta t} e^{\beta\lambda} d\lambda = e^{-\beta t}\int_0^t d\lambda = te^{-\beta t} u(t)$$

Problem. Dada la señal $g(t) = t(2-t)(1+4t)$, determine la parte par e impar

$$g_e(t) = \frac{t(2-t)(1+4t) + (-t)(2+t)(1-4t)}{2} = 7t^2$$

$$g_o(t) = \frac{t(2-t)(1+4t) - (-t)(2+t)(1-4t)}{2} = t\left(2 - 4t^2\right)$$

Problem. Dado que conocemos la salida $y_1(t)$ a la entrada $x_1(t)$, es preciso descomponer la señal $x_2(t)$ en términos de $x_1(t)$ quedando $x_2(t) = x_1(t+1) + x_1(t) - x_1(t-1)$ lo que producirá $y_2(t) = y_1(t+1) + y_1(t) - y_1(t-1)$, esto es