

Solución del 1er examen corto de Geometría Analítica

Prof. Eduardo González

12 de noviembre de 2007

Se tiene un triángulo isósceles formado por los vértices $A(3,0,0)$, $B(0,3,0)$ y $C(0,0,\frac{3\sqrt{2}}{2})$. Determine:

1. Las coordenadas esféricas de los puntos del triángulo (7 puntos)
2. La altura del triángulo (10 puntos)
3. Las nuevas coordenadas del vértice C, si se gira el triángulo sobre su base hasta quedar con todos sus puntos en el plano XY (es decir, “acostado” en el plano XY) (3 puntos).

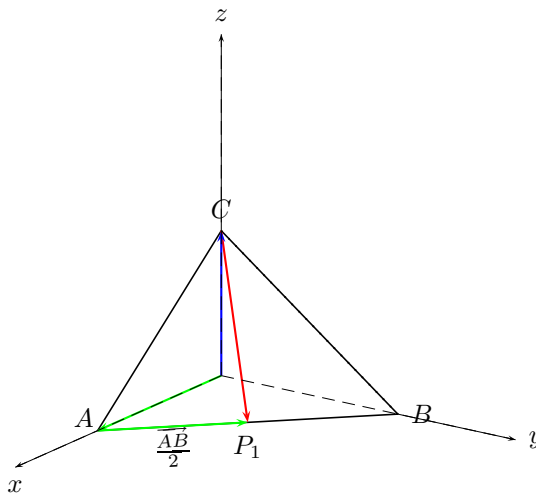


Figure 1: Triángulo isósceles visto desde el primer octante

El punto $A(3,0,0)$ se encuentra en el plano XZ, por lo tanto, el ángulo $\theta = 0$, además, A está sobre el eje X, que es perpendicular al eje Z, por tanto, el ángulo

$\psi = \frac{\pi}{2}$. A está a 3 unidades del origen, por tanto, $\rho = 3$. Se tiene entonces que en coordenadas polares A $(3, 0, \frac{\pi}{2})$. De forma similar, el punto B está en el eje Y, por tanto, está a 90 grados del plano XZ, así que las coordenadas de B son $B(3, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. El punto C está en el eje Z, así que $C(\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, 0)$

La altura de un triángulo isósceles coincide con la mediatriz de la base del triángulo, por tanto, se calcula primero este punto medio. Se puede hacer por varios métodos. El más directo es observando que los vectores \vec{OA} y \vec{OB} tiene el mismo módulo que es igual a 3, y ambos son perpendiculares, pues, están sobre los ejes coordenados X y Y. Si consideramos estos dos vectores los lados de un cuadrado, sumando $\vec{OA} + \vec{OB}$ obtenemos la diagonal de ese cuadrado, y justamente el punto apuntado por $\frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2}$ coincide con el punto medio de la base del triángulo, es decir:

$$\vec{P}_1 = \frac{\vec{OA} + \vec{OB}}{2} = \frac{[(3, 0, 0) + (0, 3, 0)]}{2} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \quad (1)$$

Otro método es:

$$\vec{P}_1 = \vec{OA} + \frac{\vec{AB}}{2} = (3, 0, 0) + \left[\frac{(0, 3, 0) - (3, 0, 0)}{2}\right] = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \quad (2)$$

Hallamos el vector \vec{CP}_1 para luego obtener su módulo y este será la altura del triángulo.

$$\vec{CP}_1 = \vec{OP}_1 - \vec{OC} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) - \left(0, 0, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \frac{-3\sqrt{2}}{2}\right) \quad (3)$$

$$|\vec{CP}_1| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + \frac{18}{4}} = \sqrt{\frac{36}{4}} = \sqrt{9} = 3 \quad (4)$$

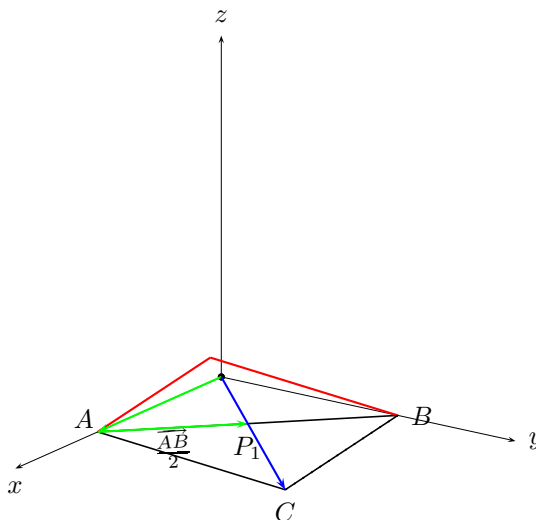
Otra forma de obtener la altura es por medio del teorema de Pitágoras, si observamos que

$$|\vec{AC}|^2 = \left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2 + |\vec{CP}_1|^2 \quad (5)$$

despejamos $|\vec{CP}_1|^2$ y obtenemos:

$$|\vec{CP}_1| = \sqrt{|\vec{AC}|^2 - \left|\frac{\vec{AB}}{2}\right|^2} = \sqrt{9 + \frac{9}{2} - \frac{9}{2}} = 3 \quad (6)$$

Si se acuesta el triángulo en el plano XY, el nuevo punto C tendrá la coordenada Z igual a 0. Hay dos posibilidades, que se acueste en el sentido positivo y en el sentido negativo del plano XY. En ambos casos, es necesario calcular un vector unitario en la dirección de $\overrightarrow{0P_1}$. Observe que el vector $\overrightarrow{P_1C}$ está en la misma recta soporte de $\overrightarrow{0P_1}$, es decir, tienen la misma dirección. Calculamos el unitario de $\overrightarrow{0P_1}$:



$$\overrightarrow{U_{0P_1}} = \left(\frac{3-2}{3-2\sqrt{2}}, \frac{3-2}{3-2\sqrt{2}}, 0 \right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) \quad (7)$$

Entonces, el primer caso de C en el lado positivo del plano XY:

$$\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0P_1} + 3\overrightarrow{U_{0P_1}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) + 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = \left(\frac{3}{2} [1 + \sqrt{2}], \frac{3}{2} [1 + \sqrt{2}], 0 \right) \quad (8)$$

En el segundo caso donde C cae en el lado negativo del plano XY se tiene:

$$\overrightarrow{0C} = \overrightarrow{0P_1} - 3\overrightarrow{U_{0P_1}} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0 \right) - 3 \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0 \right) = \left(\frac{3}{2} [1 - \sqrt{2}], \frac{3}{2} [1 - \sqrt{2}], 0 \right) \quad (9)$$