Ejercicio de Geometría Analítica

Prof. Eduardo González

November 4, 2007

Se tiene un tetraedro irregular (pirámide triangular) cuya base está formada por los vértices A(3,0,0), B(0,3,0) y C(0,0,3), calcule el cuarto vértice (D) si la altura del tetraedro es de 10 unidades.

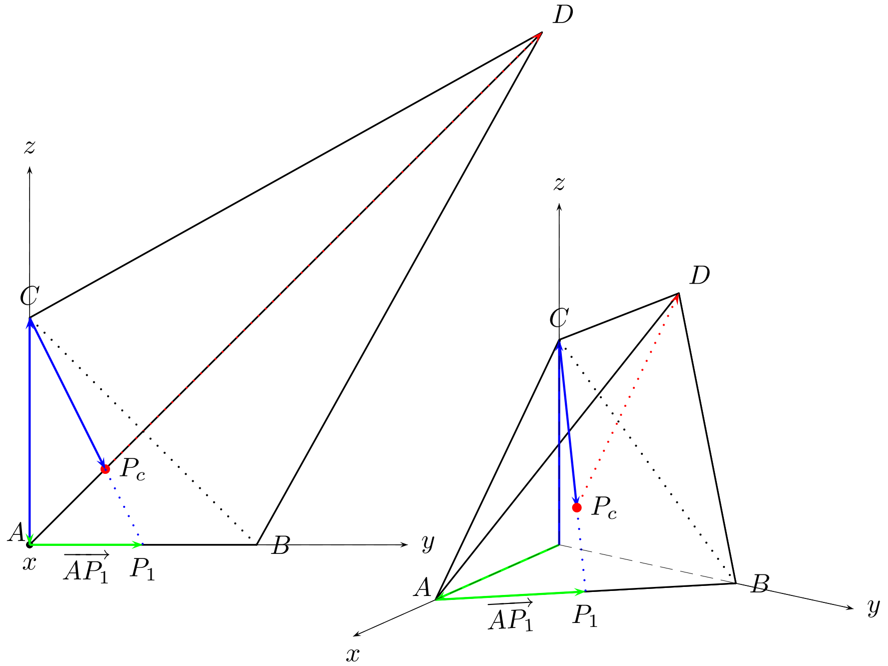

Figure 1: A la izquierda, pirámide triangular proyectada en el plano yz. A la derecha, vista desde el primer octante

Se requiere localizar el centro de la base de la pirámide, por tanto, calculamos

$$\overrightarrow{P_1} = \overrightarrow{OA} + \frac{\overrightarrow{AB}}{2} = (3,0,0) + \left[\frac{(0,3,0)-(3,0,0)}{2}\right] = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) \tag{1}$$

Hallamos el vector $\overrightarrow{CP_1}$ para luego obtener el vector unitario $\overrightarrow{U_{CP_1}}$

$$\overrightarrow{CP_1} = \overrightarrow{0P_1} - \overrightarrow{0C} = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0\right) - (0,0,3) = \left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, -3\right) \tag{2}$$

$$\left|\overrightarrow{CP_1}\right| = \sqrt{\frac{9}{4} + \frac{9}{4} + 9} = \sqrt{\frac{9+18}{2}} = \frac{\sqrt{27}}{\sqrt{2}} \tag{3}$$

$$\overrightarrow{U_{CP_1}} = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}, \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}, \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}\right) \tag{4}$$

Si observamos la base del tetraedro irregular, tenemos un triángulo equilátero, donde

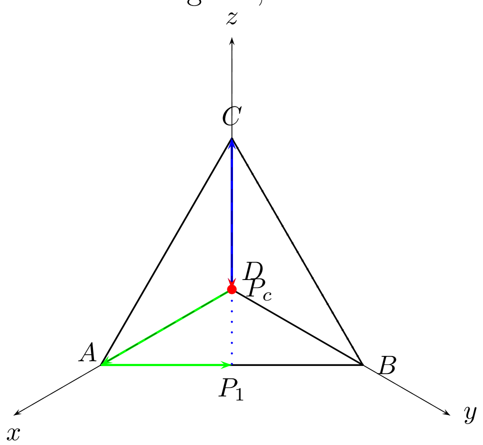

Figure 2: Vista de la base del tetraedro irregular

todos los ángulos valen 60° (véase la figura 2). Las mediatrices de los lados pasan justo en la mitad del ángulo opuesto, dividiendo éstos ángulos entre dos (30°, la mitad de 60°), por tanto, se puede calcular $\left|\overrightarrow{AP_c}\right|$ porque el segmento $\overline{AP_1}$ es la proyección del segmento $\overline{AP_c}$ en el segmento $\overline{AB}$. Luego

$$\left|\overrightarrow{AP_c}\right| \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|}{2} = \frac{\left|\overrightarrow{CB}\right|}{2} = \left|\overrightarrow{AP_1}\right| \tag{5}$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \left|\overrightarrow{0C} - \overrightarrow{0A}\right| = |(0,0,3) - (3,0,0)| = |(-3,0,3)| = 3\sqrt{2} \tag{6}$$

despejamos $\left|\overrightarrow{AP_c}\right|$ y obtenemos

$$\left|\overrightarrow{AP_c}\right| = \frac{\frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}} = \frac{\left|\overrightarrow{AC}\right|}{\sqrt{3}} = \sqrt{2}\sqrt{3} \tag{7}$$

Ya tenemos todos los vectores necesarios para hallar el punto P_c, entonces lo calculamos como:

$$\overrightarrow{P_c} = \overrightarrow{0C} + \left|\overrightarrow{AP_c}\right| \overrightarrow{U_{CP_1}} = (0,0,3) + \sqrt{2}\sqrt{3}\left(\frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}, \frac{3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}, \frac{-3\sqrt{2}}{2\sqrt{27}}\right) \tag{8}$$

$$\overrightarrow{P_c} = (0,0,3)+\left(\frac{\cancel{3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}}{\cancel{2\cdot 3\sqrt{3}}}, \frac{\cancel{3\sqrt{2}\sqrt{2}\sqrt{3}}}{\cancel{2\cdot 3\sqrt{3}}}, \frac{-\cancel{3}\sqrt{2}\sqrt{2}\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{3\sqrt{3}}}\right) = (0,0,3)+(1,1,-2) = (1,1,1) \tag{9}$$

Ahora calculamos el unitario de $\overrightarrow{P_c}$ como $\overrightarrow{U_{P_c}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ y finalmente

$$\overrightarrow{0D} = \overrightarrow{P_c} + 10\overrightarrow{U_{P_c}} = \left(1 + \frac{10\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{10\sqrt{3}}{3}, 1 + \frac{10\sqrt{3}}{3}\right) \tag{10}$$