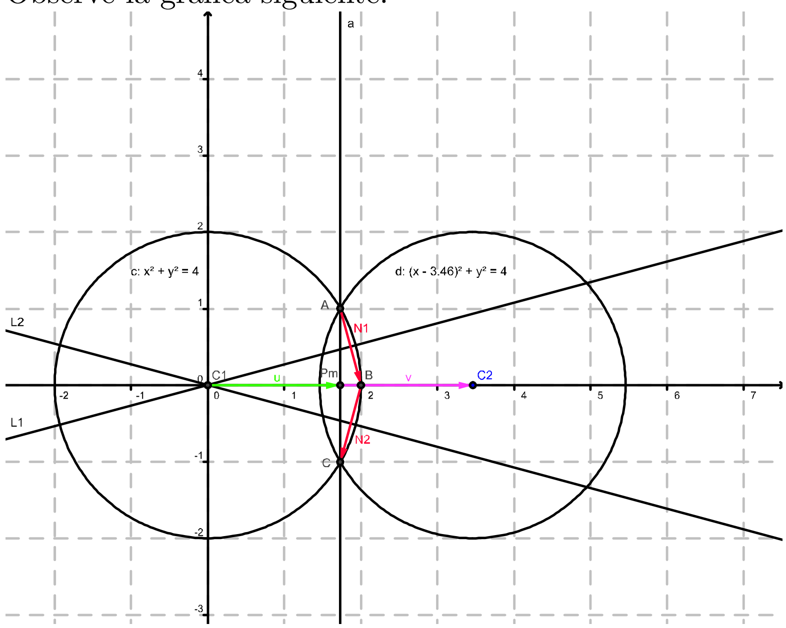
MA1B02 2do período de 2007 Sección 23
4to examen corto. 25 de febrero de 2008
Prof. Eduardo González.
Alumno____________________________C.I._______________________

Dado los puntos $A\left(\sqrt{3},1\right), B\left(2,0\right)$ y $C\left(\sqrt{3},-1\right)$ hallar:

1. La ecuación general de la circunferencia C_1 que pasa por los puntos A, B, y C (15 ptos)

   R:

   Para hallar el centro de la circunferencia C_1 basta hallar dos rectas mediatrices de dos de los segmentos $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, y $\overline{BC}$
   Observe la gráfica siguiente:



   donde las rectas L_1 y L_2 son las mediatrices de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ respectivamente. Esas rectas se calculan aprovechando que los mismos segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$ sirven de normales.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{N_1} &= \overrightarrow{AB} = (2,0) - \left(\sqrt{3},1\right) = \left(2-\sqrt{3},-1\right)\\ \overrightarrow{N_2} &= \overrightarrow{BC} = \left(\sqrt{3},-1\right) - (2,0) = \left(\sqrt{3}-2,-1\right)\end{aligned}$$

   Los puntos medios de los segmentos de recta $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se calculan como

$$\begin{aligned}\overrightarrow{0P_{m1}} &= \frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0B}}{2} = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3},1\right)\\ \overrightarrow{0P_{m2}} &= \frac{\overrightarrow{0B}+\overrightarrow{0C}}{2} = \frac{1}{2}\left(2+\sqrt{3},-1\right)\end{aligned}$$

Las ecuaciones de las rectas son

$$L_1 \ : \ A_1x+B_1y-\left(\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{0P_{m1}}\right)=0 \implies L_1:\left(2-\sqrt{3}\right)x-y-\frac{1}{2}\left[\left(2-\sqrt{3},-1\right)\cdot\left(2+\sqrt{3},1\right)\right]$$

$$L_1 \ : \ \left(2-\sqrt{3}\right)x-y-\frac{1}{2}\left(4+2\sqrt{3}-2\sqrt{3}-3-1\right)=0 \implies \boxed{L_1:\left(2-\sqrt{3}\right)x-y=0}$$

$$L_2 \ : \ A_2x+B_2y-\left(\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{0P_{m2}}\right)=0 \implies L_2:\left(\sqrt{3}-2\right)x-y-\frac{1}{2}\left[\left(\sqrt{3}-2,-1\right)\cdot\left(2+\sqrt{3},-1\right)\right]$$

$$L_2 \ : \ \left(\sqrt{3}-2\right)x-y-\frac{1}{2}\left(2\sqrt{3}+3-4-2\sqrt{3}+1\right)=0 \implies \boxed{L_2:\left(\sqrt{3}-2\right)x-y=0}$$

Observe que la ecuación de L_2 se puede reescribir como $L_2:\left(2-\sqrt{3}\right)x+y=0$, así que para hallar el punto de intersección, se resuelve el sistema de ecuaciones

$$C_{c1}:\begin{cases}\left(2-\sqrt{3}\right)x-y & = & 0\\ \left(2-\sqrt{3}\right)x+y & = & 0\end{cases}$$

y la solución de dicho sistema es $(x,y)=(0,0)$, así, el centro de la circunferencia está en $C_1\,(0,0)$. El punto B está en el mismo eje donde está el centro de la circunferencia, así que sin necesidad de calcular tanto, el radio es igual a 2, porque es trivial que $\left|\overrightarrow{C_1B}\right|=|(2,0)-(0,0)|=2$

La ecuación general de la circunferencia es entonces $\boxed{C_1:x^2+y^2-4=0}$

2. La ecuación general de la circunferencia C_2 del mismo radio que C_1 que pasa por los puntos A y C (5 ptos)
R: Debido a que la circunferencia que se pide tiene el mismo radio que la calculada $(r=2)$, al pasar por los puntos A y B significa que estos dos puntos están contenidos en el eje radical, que a su vez, es la mediatríz del segmento formado por los centros $\overline{C_{c1}C_{c2}}$, significa que el vector $\overrightarrow{u}$, que es la apotema formada desde el centro de la circunferencia C_1 (que coincide con el origen) hacia el eje radical es equivalente al vector $\overrightarrow{v}$, que también es la apotema formada desde el eje radical hacia el centro de la circunferencia C_2. De forma generalizada, el centro de la circunferencia C_2 se calcula como $\overrightarrow{0C_2}=\overrightarrow{0C_1}+2\overrightarrow{u}$, donde $\overrightarrow{u}=-\overrightarrow{D}$ y $\overrightarrow{D}$ es el vector distancia mínima del eje radical al centro de C_1. En este problema, es trivial pues el punto medio $\overrightarrow{0P_m}=\frac{\overrightarrow{0A}+\overrightarrow{0C}}{2}=\left(\sqrt{3},0\right)$ que está sobre el eje X, así, $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0P_m}$ y $\overrightarrow{0C_2}=(0,0)+2\left(\sqrt{3},0\right)=\left(2\sqrt{3},0\right)$
La ecuación general de la circunferencia C_2 es

$$C_2:\left(x-2\sqrt{3}\right)^2+y^2=4 \implies \boxed{C_2:x^2+y^2-4\sqrt{3}x+8=0}$$