MA1B02 2do período de 2007 Sección 23
3er parcial, 14 de marzo de 2008
Prof. Eduardo González.

Alumno__________________________C.I._____________________

1. Un punto se mueve de tal manera que su distancia a la recta $L: x+y+1=0$ es siempre igual a su distancia al punto $M(-2,-1)$. Hallar la ecuación de su lugar geométrico.
R:

$$\begin{aligned} d(L,P) &= d(P,M) \implies \frac{|x+y+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{(x+2)^2+(y+1)^2} \\ &\implies (x+y+1)^2 = 2(x+2)^2 + 2(y+1)^2 \end{aligned}$$

$$(x+y)^2 + 2(x+y) + 1 = 2(x+2)^2 + 2(y+1)^2$$

$$x^2 + 2xy + y^2 + 2x + 2y + 1 = 2x^2 + 8x + 8 + 2y^2 + 4y + 2$$

$$\boxed{x^2 - 2xy + y^2 + 6x + 2y + 9 = 0}$$

2. Hallar la ecuación de la recta que pasa por la intersección de las rectas $2x-3y-5=0$ y $x+2y-13=0$ y su intercepto con el eje x es igual al doble de su pendiente.
R:
Este problema se puede resolver de varias maneras. Dos de las formas son, haciendo una familia de rectas o hallando la intersección de las dos rectas dadas:
a) Por familia de rectas:

$$\begin{aligned} L_1 + \lambda L_2 &= 0 \implies 2x - 3y - 5 + \lambda x + 2\lambda y - 13\lambda = 0 \\ (\lambda+2)x + (2\lambda-3)y - 13\lambda - 5 &= 0 \end{aligned}$$

De $m = -\frac{A}{B}$

$$m = -\frac{\lambda+2}{2\lambda-3}$$

Si $y=0$, $x=2m$, $x=-2\left(\frac{\lambda+2}{2\lambda-3}\right)$
Sustituyendo en la ecuación de la familia de rectas

$$\begin{aligned} \frac{-2(\lambda+2)(\lambda+2)}{2\lambda-3} - 13\lambda - 5 &= 0 \implies -2(\lambda+2)(\lambda+2) = (13\lambda+5)(2\lambda-3) \\ -2\lambda^2 - 8\lambda - 8 &= 26\lambda^2 - 39\lambda + 10\lambda - 15 \implies 28\lambda^2 - 21\lambda - 7 = 0 \\ &\to 4\lambda^2 - 3\lambda - 1 = 0 \end{aligned}$$

Las soluciones de esta ecuación cuadrática son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -\frac{1}{4}$. Sustituyendo las soluciones en la ecuación de la familia, se tiene finalmente

$$\boxed{L_1: 3x - y - 18 = 0}$$

$$\boxed{L_2: x - 2y - 1 = 0}$$

b) Solución por punto pendiente (la solución más rápida y sencilla)
Se halla primero la intersección de las rectas dadas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y-5 &=& 0 \\ x+2y-13 &=& 0 \end{array}\right. \implies \left\{\begin{array}{rcl} 2x-3y-5 &=& 0 \\ -2x-4y+26 &=& 0 \end{array}\right. \implies -7y+21=0$$

$$\begin{array}{rcl} x &=& 7 \\ y &=& 3 \end{array}$$

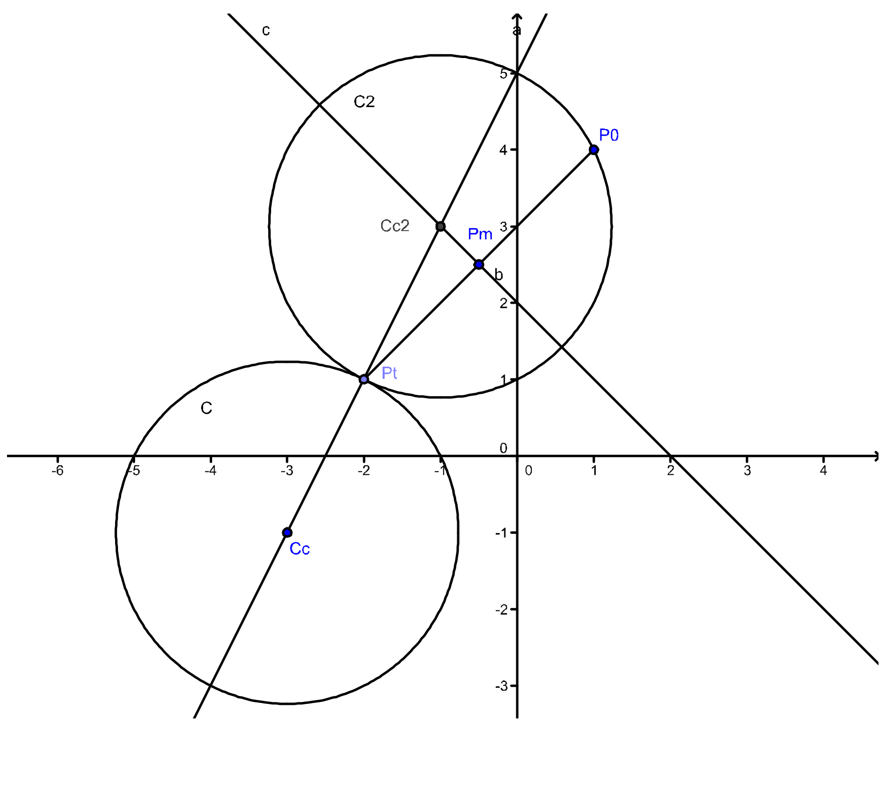
Entonces el punto de intersección es $I\,(7,3)$. Con la ecuación punto pendiente $(y-y_1) = m\,(x-x_1)$, si $y=0$, entonces $x=2m$, luego

$$(0-3) = m\,(2m-7) \implies 2m^2-7m+3=0$$

tiene las soluciones $m_1=3$ y $m_2=\frac{1}{2}$. Sustituyendo en la ecuación punto pendiente:

$$\begin{array}{rcl} L_1 &:& (y-3)=3\,(x-7) \implies 3x-y-18=0 \\ L_2 &:& (y-3)=\dfrac{1}{2}\,(x-7) \implies x-2y-1=0 \end{array}$$

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P_0\,(1,4)$ y es tangente a la circunferencia $C: x^2+y^2+6x+2y+5=0$ en el punto $P_t\,(-2,1)$.
R:
La intersección de dos rectas radiales a una circunferencia coincide con el centro de



dicha circunferencia. La recta que contiene al centro de la circunferencia C dada y el punto de tangencia, contendrá también al centro de la circunferencia tangente a hallar.

$$\begin{aligned} C_c\left(\frac{-C}{2}, \frac{-D}{2}\right) &= (-3,-1) \\ \overrightarrow{C_cP_t} &= (-2,1)-(-3,-1)=(1,2) \\ L_c &: \overrightarrow{0P}=(-2,1)+\lambda\,(1,2) \end{aligned}$$

La recta mediatríz del arco formado por los puntos P_t y P_0 también contendrán el centro de la circunferencia a hallar.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0P_m} &= \frac{\overrightarrow{0P_t}+\overrightarrow{0P_0}}{2} = \frac{(-2,1)+(1,4)}{2} = \frac{(-1,5)}{2} \\ \overrightarrow{N} &= \overrightarrow{P_tP_0} = (1,4)-(-2,1)=(3,3) \\ L_t &: 3x+3y-\left[\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{0P_m}\right]=0 \rightarrow L_t : x+y-2=0 \end{aligned}$$

La intersección de las rectas L_c y L_t será el centro de la circunferencia hallada.

$$-2+\lambda+1+2\lambda-2=0 \implies \lambda=1$$

Sustituyendo λ en L_c

$$\begin{aligned} \overrightarrow{0C_2} &= \overrightarrow{0P}=(-1,3) \\ r &= \left|\overrightarrow{C_2P_0}\right| = \sqrt{5} \\ & \boxed{C_2 : (x+1)^2+(y-3)^2=5} \end{aligned}$$

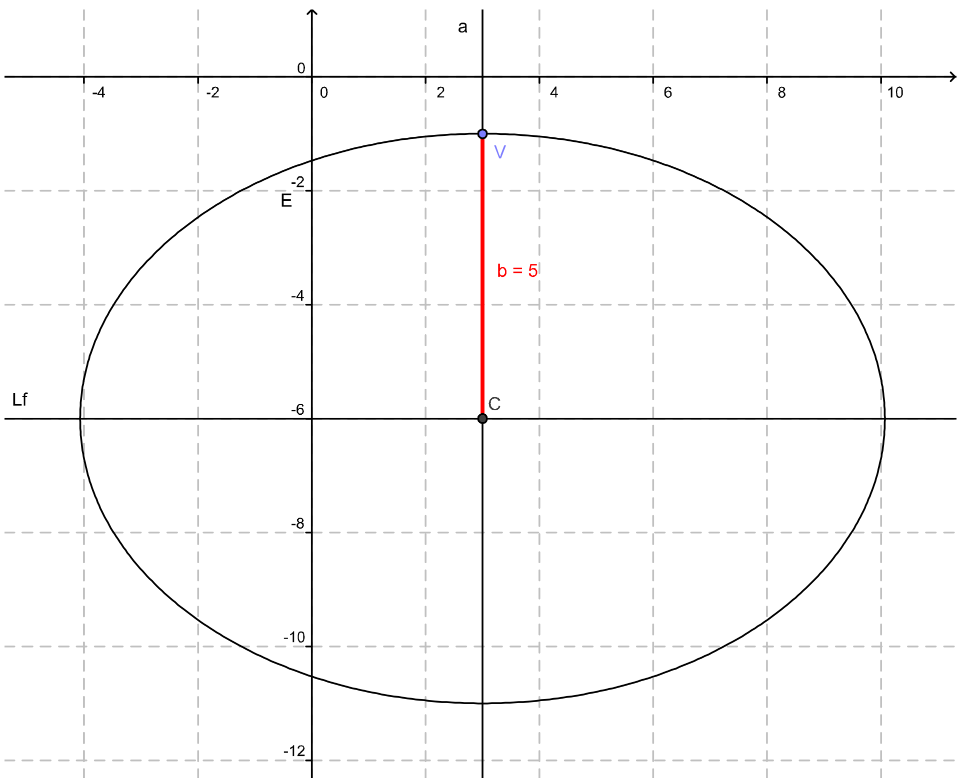
4. El punto $V\,(3,-1)$ es un extremo del eje menor de una elipse, cuyos focos se encuentran en la recta $L : y+6=0$. Hallar la ecuación general de la elipse, sabiendo que su excentricidad es $\frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned} b &= \left|-6+1\right| = 5 \\ e &= \frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}}{2} \implies c=\frac{\sqrt{2}}{2}a \\ c^2 &= a^2-b^2 \implies \frac{1}{2}a^2=a^2-25 \implies a=\sqrt{50} \end{aligned}$$

Luego, como el eje focal es paralelo al eje X, debemos usar la ecuación

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$$E : \frac{(x-3)^2}{50}+\frac{(y+6)}{25}=1 \implies \boxed{E : x^2+2y^2-6x+24y+31=0}$$


a
0
-4
-2
0
2
4
6
8
10
V
-2
E
b = 5
-4
Lf
-6
C
-8
-10
-12