2DO QUIZ GEOMETRÍA ANALÍTICA

PROF. EDUARDO GONZÁLEZ

Problem. Hallar el módulo del vector $\vec{P}$ si se sabe que

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right|}{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}$$

y que el ángulo entre los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$ es de 30°

Aprovechando la propiedad distributiva $\left(\vec{R}+\vec{S}\right)\times\vec{T} = \vec{R}\times\vec{T}+\vec{S}\times\vec{T}$, se desarrolla el numerador:

$$\left|\left(\vec{A}+\vec{B}\right)\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right| = \left|\vec{A}\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right)+\vec{B}\times\left(\vec{A}-\vec{B}\right)\right|$$

aplicando nuevamente la propiedad distributiva:

$$\left|\cancelto{\vec{0}}{\vec{A}\times\vec{A}}-\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}-\cancelto{\vec{0}}{\vec{B}\times\vec{B}}\right| = \left|-\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}\right|$$

como $-\vec{A}\times\vec{B}=\vec{B}\times\vec{A}$, entonces $\left|-\vec{A}\times\vec{B}+\vec{B}\times\vec{A}\right| = \left|2\vec{B}\times\vec{A}\right| = 2\left|\vec{B}\times\vec{A}\right|$

La propiedad trigonométrica del producto vectorial permite seguir despejando el numerador, porque $\left|\vec{B}\times\vec{A}\right| = \left|\vec{A}\times\vec{B}\right| = \left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|\sin 30°$, finalmente:

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{2\cancel{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}\sin 30°}{\cancel{\left|\vec{A}\right|\left|\vec{B}\right|}} = \frac{2}{2} = 1$$

Problem. Dado los puntos $A(3,3,3)$ y $B(2,2,-3)$, hallar las coordenadas del punto C que es colineal con A y con B y está en el plano XY

Hay muchos métodos para resolver esto. Uno de los más sencillos es aplicando vectores proporcionales, porque $\vec{AC}=\lambda\vec{AB}$:

$$\vec{AB} = 0\vec{B}-0\vec{A} = (2,2,-3)-(3,3,3) = (-1,-1,-6)$$
$$\vec{AC} = 0\vec{C}-0\vec{A} = \lambda\vec{AB} = \lambda(-1,-1,-6)$$
$$0\vec{C} = \lambda(-1,-1,-6)+(3,3,3)$$
$$(C_x, C_y, 0) = (3-\lambda, 3-\lambda, 3-6\lambda)$$

al despejar $\lambda = 1/2$ luego

$$0\vec{C} = (5/2, 5/2, 0)$$

Otra forma de resolver es aplicando producto vectorial, mediante el teorema de complanaridad:

$$\vec{AB}\times\vec{AC} = \vec{0}$$
$$\vec{AC} = (C_x-3, C_y-3, -3)$$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -1 & -1 & -6 \\ C_x - 3 & C_y - 3 & -3 \end{vmatrix} = (6C_y - 15)\,\hat{i} - (6C_x - 15)\,\hat{j} + (C_y - C_x)\,\hat{k} = \vec{0}$$

$$\begin{cases} 6C_y - 15 & = & 0 \\ 6C_x - 15 & = & 0 \\ C_y - C_x & = & 0 \end{cases}$$

finalmente $C_x = {}^5/_2$,$C_y = {}^5/_2$, $C_z = 0$