MA1B02 2do período de 2007
Solución del problema del 2do quiz que fue suspendido.

1. Hallar la ecuación general del plano que es paralelo al vector $\overrightarrow{A} = (3, 4, 5)$, contiene al punto $P_1\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y dista tres (3) unidades del punto $Q\,(6, 6, 6)$.

   R:

   El punto $P_1\left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ y el vector $\overrightarrow{A} = (3, 4, 5)$ conforman una recta que estará contenida en el plano que se está buscando. Podemos simplificar el problema con otro punto que pertenezca a la recta y que a su vez pertenecerá al plano que se busca. Observando que la recta sería $L : \overrightarrow{0P} = \left(1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) + \lambda\,(3, 4, 5)$, si hacemos que $\lambda = -\frac{1}{3}$ encontramos que uno de los puntos de la recta es el origen. De esta forma, a continuación, podemos obviar el cálculo del término independiente de las ecuaciones de los planos.

   Como hay infinitos planos que contienen a la recta L, tendremos que hacer una familia de planos para luego hallar el o los planos que distan tres (3) unidades del punto $Q\,(6, 6, 6)$.

   Para el plano π_1 hallamos la normal $\overrightarrow{N_1}$ como el producto vectorial entre el vector $\overrightarrow{A}$ y el vector $\overrightarrow{0Q}$:

$$\overrightarrow{N_1} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ 6 & 6 & 6 \end{vmatrix} = (24-30)\,\widehat{i} - (18-30)\,\widehat{j} + (18-24)\,\widehat{k} = (-6, 12, -6) \rightarrow (-1, 2, -1)$$

   El plano es:

$$\pi_1 : -x + 2y - z = 0 \rightarrow x - 2y + z = 0$$

   Para la normal del plano π_2 nos valemos del producto vectorial entre los vectores $\overrightarrow{A}$ y $\overrightarrow{N_1}$:

$$\overrightarrow{N_2} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = (-4-10)\,\widehat{i} - (-3+5)\,\widehat{j} + (6+4)\,\widehat{k} = (-14, -2, 10) \rightarrow (-7, -1, 5)$$

   De la misma forma, el plano π_2 es:

$$\pi_2 : -7x - y + 5z = 0 \rightarrow 7x + y - 5z = 0$$

   Luego se crea la familia de planos:

$$F_\pi : \pi_1 + \lambda \pi_2 = 0$$

$$x - 2y + z + 7\lambda x + \lambda y - 5\lambda z = 0$$

$$(7\lambda + 1)\, x + (\lambda - 2)\, y - (5\lambda - 1)\, z = 0$$

Aplicando la ecuación de distancia entre un punto y un plano:

$$\frac{|6\,(7\lambda + 1) + 6\,(\lambda - 2) - 6\,(5\lambda - 1)|}{\sqrt{(7\lambda + 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (5\lambda - 1)^2}} = 3$$

$$2\,|7\lambda + 1 + \lambda - 2 - 5\lambda + 1| = \sqrt{(7\lambda + 1)^2 + (\lambda - 2)^2 + (5\lambda - 1)^2}$$

$$39\lambda^2 + 6 = 0$$

La ecuación resultante no tiene solución real, por tanto, no existe plano que diste 3 unidades del punto Q y que además contenga a la recta L.

Se puede verificar esta afirmación, si determinando la distancia entre el plano π_2 (que es perpendicular al plano π_1 que proyecta el vector $\overrightarrow{P_1 Q}$ sobre el plano π_2) y el punto Q encontramos que es menor a 3 unidades:

$$\frac{|7\,(6) + 6 - 5\,(6)|}{\sqrt{49 + 1 + 25}} = \frac{6\sqrt{3}}{5} < 3$$

Entonces se confirma la inexistencia del plano.