Solución del 2do Quiz de Geometría Analítica

20 de enero de 2008

Prof. Eduardo González — MA1B02 Sección 23

Instrucciones: este examen se puede resolver sin el uso de calculadoras.

1. Calcule la ecuación general del plano que es paralelo a las rectas $L_1 : \overrightarrow{0P} = (2, -2, 2) + \alpha\,(3, 3, 2)$ y $L_2 : \overrightarrow{0P} = (2, 2, 2) + \beta\,(3, -3, 2)$ y contiene al punto $P_1\,(1, 2, 3)$ (5p)

   R: Si un plano es paralelo a las rectas L_1 y L_2 significa que también será paralelo a los vectores directores de las rectas, entonces se puede hacer un vector normal al plano con el producto vectorial de los vectores directores:

$$\overrightarrow{N} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \end{vmatrix} = (6+6)\,\widehat{i} - (6-6)\,\widehat{j} + (-9-9)\,\widehat{k} = (12, 0, -18) \to (2, 0, -3)$$

   La ecuación general se determina calculando el término independiente como

$$-D = \overrightarrow{0P_1} \cdot \overrightarrow{N} = (1, 2, 3) \cdot (2, 0, -3) = 2 - 9 = -7$$

   dando $D = 7$. La ecuación del plano es $\boxed{\pi : 2x - 3z + 7 = 0}$

   (a) Hallar la forma vectorial paramétrica de la ecuación del plano (4p)

   R: la forma vectorial paramétrica requiere dos vectores coplanares del plano y un punto del plano. Todos estos datos son disponibles, así que: $\boxed{\pi : \overrightarrow{0P} = (1, 2, 3) + \lambda_1\,(3, 3, 2) + \lambda_2\,(3, -3, 2)}$

   (b) Hallar la forma escalar de la ecuación del plano (4p)

   R: Para esta ecuación, solo se necesita la normal que ya calculamos y un punto perteneciente al plano, por tanto, $\boxed{\pi : (2, 0, -3) \cdot (x-1, y-2, z-3) = 0}$

   (c) Hallar la forma determinante de la ecuación del plano (3p)

   R: Esta forma es el producto mixto de los vectores coplanares no paralelos y el vector $\overrightarrow{P_1P}$, luego:

$$\pi : \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & -3 & 2 \\ x-1 & y-2 & z-3 \end{vmatrix} = 0$$

   (d) Calcule la distancia del plano calculado a las rectas L_1 y L_2

   R: Con el uso de la ecuación de distancia mínima entre un punto y un plano y lo calculamos utilizando los puntos que están en las ecuaciones de las rectas:

$$d_1 = \frac{|2\,(2) - 3\,(2) + 7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

   y para la otra recta:

$$d_2 = \frac{|2\,(2) - 3\,(2) + 7|}{\sqrt{4+9}} = \frac{5\sqrt{13}}{13}$$

   Observe que intencionalmente las distancias dan igual, lo que significa que el plano es equidistante de las dos rectas.