MA1B02 2do período de 2007 Sección 23
2do parcial, 11 de febrero de 2008
Prof. Eduardo González.
Alumno________________________C.I.___________________

1. Hallar las ecuaciones de los planos que son paralelos al vector $\overrightarrow{A} = \left(\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\right)$, contienen al punto $P_1\left(2, -\sqrt{3}, 3\right)$ y distan $\frac{3}{4}$ unidades del origen de coordenadas. (5 ptos)

   R:

   Hacemos una familia de planos que contengan a la recta que se puede formar con el vector $\overrightarrow{A}$ y el punto P_1, es decir $\overrightarrow{0P} = \left(2, -\sqrt{3}, 3\right) + t\left(\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\right)$. Necesitamos dos planos que sirvan de base, para lo que necesitamos dos normales, que pueden ser calculadas de diversas formas. Una de las más rápidas es produciendo vectores perpendiculares a $\overrightarrow{A} = \left(\sqrt{3}, -1, \sqrt{3}\right)$ aplicando el artificio de hacer una de las coordenadas igual a 0, invertir las otras dos y cambiarle el signo a una de ellas:

$$\overrightarrow{N_1} = \left(1, \sqrt{3}, 0\right) \qquad \overrightarrow{N_2} = \left(0, \sqrt{3}, 1\right)$$

   Pasamos a calcular los planos:

$$\pi_1 \;:\; x + \sqrt{3}y + D_1 = 0 \qquad D_1 = -\left(\overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{0P_1}\right) = -(2-3) = 1$$

$$\boxed{\pi_1 : x + \sqrt{3}y + 1 = 0}$$

$$\pi_2 \;:\; \sqrt{3}y + z + D_2 = 0 \qquad D_2 = -\left(\overrightarrow{N_2}\cdot\overrightarrow{0P_1}\right) = -(-3+3) = 0$$

$$\boxed{\pi_2 : \sqrt{3}y + z = 0}$$

   La familia de planos queda entonces como

$$F_\pi : x + \sqrt{3}\left(\lambda+1\right)y + \lambda z + 1 = 0$$

   Aplicando la fórmula de distancia mínima (distancia mínima al origen):

$$\begin{aligned}\frac{|D|}{\left|\overrightarrow{N}\right|} &= d \Longrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+3\left(\lambda+1\right)^2+\lambda^2}} = \frac{3}{4} \Longrightarrow 4\lambda^2 + 6\lambda + 4 - \frac{16}{9} = 0 \\ \lambda^2 + \frac{3}{2}\lambda + \frac{5}{9} &= 0\end{aligned}$$

   Resolviendo la función cuadrática:

$$\lambda = \frac{-\frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{20}{9}}}{2} \Longrightarrow \lambda_1 = -\frac{3}{2}; \lambda_2 = -\frac{5}{6}$$

Finalmente:

$$\pi_1 \;:\; x+\frac{\sqrt{3}}{3}y-\frac{2}{3}z+1=0 \Longrightarrow \boxed{3x+\sqrt{3}y-2z+3=0}$$
$$\pi_2 \;:\; x+\frac{\sqrt{3}}{6}y-\frac{5}{6}z+1=0 \Longrightarrow \boxed{6x+\sqrt{3}y-5z+6=0}$$

2. Dada la circunferencia

$$C:\begin{cases} E: x^2+y^2+z^2-6x+6y-4z+13=0 \\ \pi: 2x+2y+z+2=0 \end{cases}$$

calcule:

(a) El centro y el radio de la circunferencia C (2.5 ptos)

R:

$$C_E\left(\frac{-D}{2},\frac{-E}{2},\frac{-F}{2}\right)=C_E\left(\frac{6}{2},\frac{-6}{2},\frac{4}{2}\right)=C_E\,(3,-3,2)$$

Con el centro de la superficie esférica C_E y la normal del plano π se construye una recta que pasa por el centro de la superficie esférica E y el centro de la circunferencia C, así como de los centros de la familia de superficies esféricas que contienen a la circunferencia C.

$$L_c: \overrightarrow{0P}=(3,-3,2)+\lambda\,(2,2,1)$$

Calculamos $\{L_c\cap\pi\}$ despejando $\overrightarrow{0P}$ en π

$$2\,(3+2\lambda)+2\,(-3+2\lambda)+2+\lambda+2=0 \Longrightarrow \lambda=-\frac{4}{9}$$

luego

$$\overrightarrow{0C_C}=(3,-3,2)-\frac{4}{9}\,(2,2,1)=\left(\frac{19}{9},-\frac{35}{9},\frac{14}{9}\right)\Longrightarrow \boxed{C_C\left(\tfrac{19}{9},-\tfrac{35}{9},\tfrac{14}{9}\right)}$$

El radio de la circunferencia se calcula con $r_c=\sqrt{r_E^2-d^2}$, donde r_E es el radio de la superficie esférica E y d es la distancia entre el plano π y el punto centro de la superficie esférica E.

$$r_E=\frac{1}{2}\sqrt{D^2+E^2+F^2-4G}=\frac{1}{2}\sqrt{36+36+16-4\,(13)}=\frac{\sqrt{36}}{2}=3$$

$$d=\frac{|Ax+By+Cz+D|}{\left|\overrightarrow{N}\right|}=\frac{|2\,(3)+2\,(-3)+2+2|}{\sqrt{4+4+1}}=\frac{4}{3}$$

$$r_c=\sqrt{9-\frac{16}{9}}=\frac{1}{3}\sqrt{65}$$

(b) Una superficie esférica que junto con E formen el plano radical π (2.5 ptos)

R:

Como el plano radical se calcula mediante $\pi_R = SE_1 - SE_2$, despejando y haciendo $\pi_R = \pi$ y $SE_1 = E$, obtenemos SE_2 como:

$$\begin{aligned} SE_2 &= E - \pi : x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 4z + 13 - (2x + 2y + z + 2) \\ & \boxed{SE_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 4y - 5z + 11 = 0} \end{aligned}$$

(c) Una superficie esférica que contenga la circunferencia C y contenga al origen de coordenadas (2.5 ptos)

R:

Hacemos una familia de superficies esféricas $F_{SE} : E + \lambda SE_2$ y hallamos un λ que satisfaga la ecuación de la familia, dado el punto $(0, 0, 0)$

$$F_{SE} : (1+\lambda)\,x^2 + (1+\lambda)\,y^2 + (1+\lambda)\,z^2 - (6+8\lambda)\,x + (6+4\lambda)\,y - (4+5\lambda)\,z + 13 + 11\lambda = 0$$

con $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ queda $\lambda = -\frac{13}{11}$. Sustituyendo λ en la ecuación de la familia, se obtiene

$$-\frac{2}{11}x^2 - \frac{2}{11}y^2 - \frac{2}{11}z^2 - \frac{38}{11}x + \frac{14}{11}y + \frac{21}{11}z = 0$$

para simplificarla y hacer que la ecuación tenga la forma general, multiplicamos por $\frac{-11}{2}$, y queda

$$\boxed{x^2 + y^2 + z^2 + 19x - 7y - \tfrac{21}{2}z = 0}$$

(d) Las ecuaciones de las dos rectas tangente a la circunferencia C que son paralelas a la recta $L : \overrightarrow{0P} = \lambda\,(-1, 1, 0)$ (2.5 ptos)

R:

El producto vectorial de la normal del plano radical π con el vector director $\overrightarrow{L}$ de la recta L dará un vector perpendicular a las tangentes paralelas a L, esto nos permitirá calcular los puntos de tangencia como:

$$\overrightarrow{0P_t} = \overrightarrow{0C_C} \pm r_c \overrightarrow{U_r}$$

donde

$$\begin{aligned} \overrightarrow{U_r} &= \frac{\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{L}}{\left|\overrightarrow{N} \times \overrightarrow{L}\right|} \\ \overrightarrow{N} \times \overrightarrow{L} &= \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\widehat{i} - \widehat{j} + 4\widehat{k} = (-1, -1, 4) \rightarrow (1, 1, -4) \\ \overrightarrow{U_r} &= \frac{(1, 1, -4)}{\sqrt{18}} = \frac{\sqrt{2}}{6}\,(1, 1, -4) \end{aligned}$$

luego

$$\overrightarrow{0P_t} = \left(\frac{19}{9}, -\frac{35}{9}, \frac{14}{9}\right) \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{65}}{18}(1,1,-4)$$

finalmente

$$\boxed{L_t : \left(\tfrac{19}{9}, -\tfrac{35}{9}, \tfrac{14}{9}\right) \pm \tfrac{\sqrt{2}\sqrt{65}}{18}(1,1,-4) + \lambda(-1,1,0)}$$

Elija uno de los siguientes problemas:

3. Por los puntos de intersección de la recta $L : \overrightarrow{0P} = (-2,1,-5) + \lambda(2,2,1)$ y la superficie esférica $E : x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y + 10z - 19 = 0$ se han trazado dos planos tangentes a E. Hallar sus ecuaciones. (5 ptos)

   R:

   Interceptando un plano que tenga como normal el vector director de la recta L y pase por el punto centro de la superficie esférica E, con la misma recta L, dará el punto central del segmento de recta formado por los puntos de intersección de L con E. Así, calculamos este plano. El centro de E es $C_e\left(\frac{-D}{2}, \frac{-E}{2}, \frac{-F}{2}\right) = C_e(-2,1,-5)$ y el vector normal del plano será $\overrightarrow{N} = (2,2,1)$

$$\pi : 2x+2y+z+\left(-\overrightarrow{N}\cdot\overrightarrow{0C_e}\right) = 2x+2y+z-(-4+2-5) = 0 \longrightarrow \pi : 2x+2y+z+7 = 0$$

$$\{L\cap\pi\} : 2(-2+2\lambda) + 2(1+2\lambda) - 5 + \lambda + 7 = 9\lambda = 0 \longrightarrow \lambda = 0$$

   observe que el centro de la superficie esférica coincide con el punto de la recta L, es decir, la recta pasa por el centro de la superficie esférica E. Obteniendo el radio, y gracias al vector director de la recta, podemos hallar los puntos de tangencia fácilmente.

$$\begin{aligned} r_E &= \sqrt{D^2+E^2+F^2-4G} = \sqrt{16+4+100+76} = \sqrt{196} = 14 \\ \overrightarrow{U_L} &= \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \\ \overrightarrow{0P_t} &= \overrightarrow{0C_e} \pm r_E\overrightarrow{U_L} = (-2,1,-5) \pm 14\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

   finalmente:

$$\boxed{\pi_t : (2,2,1)\cdot\left[(x,y,z) - (-2,1,-5) \pm 14\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\right] = 0}$$

4. Determine la posición relativa entre las rectas $L_1 : \overrightarrow{0P} = (2,-5,-1) + k(-2,3,3)$ y $L_2 : \frac{x+4}{3} = -(y+3) = \frac{z+9}{4}$. Si se cruzan, determine el vector distancia mínima entre esas rectas. Si se cortan, halle la ecuación del plano que las contiene (5 ptos)

   R:

   Para verificar que se cortan o no, lo primero que se debe hacer es verificar coplanaridad. Hacemos un vector entre un punto de cada recta y verificamos este vector con los vectores directores de las rectas con el producto mixto:

$$\begin{aligned}
& & P_1(2,-5,-1)\,; P_2(-4,-3,-9) \\
& \longrightarrow & \overrightarrow{P_1P_2} = (-4,-3,-9)-(2,-5,-1) = (-6,2,-8) \longrightarrow (-3,1,-4) \\
\left(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{L_1}\right)\times\overrightarrow{L_2} & = & \begin{vmatrix} -3 & 1 & -4 \\ 2 & -5 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = -3(-20-1)-(8+3)-4(-2+15) \\
\left(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{L_1}\right)\times\overrightarrow{L_2} & = & 63-11-52 = 0
\end{aligned}$$

Como $\left(\overrightarrow{P_1P_2}\cdot\overrightarrow{L_1}\right)\times\overrightarrow{L_2} = 0$, significa que son coplanares, es decir, las rectas se cortan o son paralelas. Para verificar que son paralelas, probamos

$$\overrightarrow{L_1}\times\overrightarrow{L_2} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ -2 & 3 & 3 \\ 3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = (12+3)\,\widehat{i}-(-8-9)\,\widehat{j}+(2-9)\,\widehat{k} = (15,17,-7)$$

esto demuestra que no son paralelos, por tanto, el plano que contiene a las rectas es

$$\begin{aligned}
\pi & : & 15x+17y-7z-[(15,17,-7)\cdot(2,-5,-1)] = 15x+17y-7z-(30-85+7) = 0 \\
& \Longrightarrow & \boxed{\pi : 15x+17y-7z+48=0}
\end{aligned}$$