MA1B02 Sección 23 | **1er Parcial** | **Universidad de Carabobo**
Prof. Eduardo González | **Noviembre 28, 2007** | **Facultad de Ingeniería**

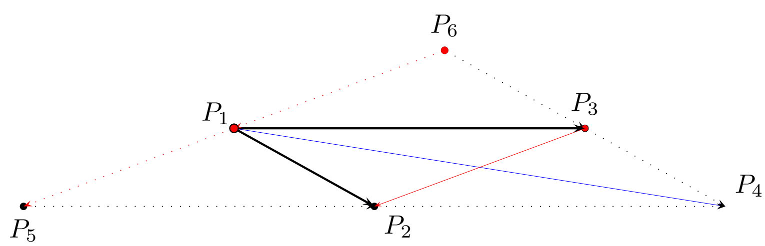
Este examen se puede resolver sin necesidad de una calculadora. La estrategia que se sugiere es comenzar por los problemas de mayor puntuación que son los más fáciles.

Nombre y Cédula: ______________________________

$\boxed{6}$ 1. Tres vértices de un paralelogramo son los puntos $P_1(1,1,1)$, $P_2(3,3,3)$ y $P_3(6,6,3)$. Calcular el cuarto vértices en todas sus posibles posiciones.

Solución:

Las tres posibles ubicaciones del cuarto vértice se pueden identificar en la figura.

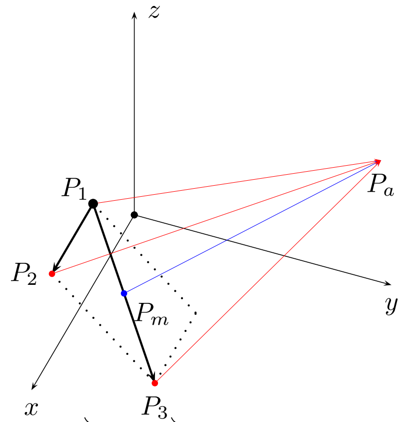


$$\overrightarrow{P_1P_2} = (2,2,2)$$
$$\overrightarrow{P_1P_3} = (5,5,2)$$
$$\overrightarrow{0P_4} = \overrightarrow{0P_2} + \overrightarrow{P_1P_3} = (3,3,3) + (5,5,2) = (8,8,5) \tag{1}$$
$$\overrightarrow{0P_5} = \overrightarrow{0P_2} - \overrightarrow{P_1P_3} = (3,3,3) - (5,5,2) = (-2,-2,1)$$
$$\overrightarrow{0P_6} = \overrightarrow{0P_3} - \overrightarrow{P_1P_2} = (6,6,3) - (2,2,2) = (4,4,1)$$

$\boxed{3}$ 2. Hallar las coordenadas del ápice de una pirámide recta, cuya base tiene tres de los cuatro vértices en $P_1\,(2,0,2)$, $P_2\,(4,0,2)$ y $P_3\,(4,2,0)$ y su volumen es de $\frac{40}{3}$ unidades cúbicas (dos soluciones).

Solución:

La gráfica muestra la pirámide recta, cuya base es un polígono recto con cada par de lados opuestos iguales. El punto ubicado en la mitad de cualquiera de las diagonales de la base estará en la línea eje de la pirámide.



$$\overrightarrow{0P_m} = \frac{\overrightarrow{0P_1} + \overrightarrow{0P_3}}{2} = \frac{(6,2,2)}{2} = (3,1,1) \tag{2}$$

Se puede hallar un vector $\overrightarrow{V}$ perpendicular a $\overrightarrow{P_1P_2}$ y a $\overrightarrow{P_1P_3}$ mediante el producto vectorial $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}$

$$\overrightarrow{V} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix} = (0,4,4) \tag{3}$$

El vector unitario en esa dirección es $\overrightarrow{U_V} = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

Para hallar la altura de la pirámide, aprovechamos la ecuación del volumen $V = \frac{A_b h}{3}$ donde despejamos $h = \frac{3V}{A_b}$, y calculamos el área de la base con $A_b = \left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| \left|\overrightarrow{P_2P_3}\right|$, luego

$$h = \frac{3 \cdot 40}{3 \cdot 4\sqrt{2}} = 5\sqrt{2} \tag{4}$$

El ápice de la pirámide está finalmente en

$$\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0P_m} + 5\sqrt{2}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (3,1,1) + (0,5,5) = (3,6,6) \tag{5}$$

y en el sentido contrario

$$\overrightarrow{0A} = \overrightarrow{0P_m} - 5\sqrt{2}\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (3,1,1) - (0,5,5) = (3,-4,-4) \tag{6}$$

$\boxed{4}$ 3. Un sistema de coordenadas oblícuo está orientado y dirigido por los vectores dados en coordenadas esféricas $\overrightarrow{A} = \left(4, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$, $\overrightarrow{B} = \left(4, \frac{3\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ y $\overrightarrow{C} = \left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{6}\right)$. Calcule las coordenadas de $\overrightarrow{D} = \left(4, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{3}\right)$ en dicho sistema.

Solución:

Lo primero que debe hacerse es convertir las coordenadas esféricas a rectangulares.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A} &= \left(4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (2, 2, 2\sqrt{2}) \\
\overrightarrow{B} &= \left(4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{-\sqrt{2}}{2}, 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 4\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = (-2, 2, 2\sqrt{2}) \\
\overrightarrow{C} &= \left(4\cdot\frac{1}{2}\cdot 0, 4\cdot\frac{1}{2}, 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0, 2, 2\sqrt{3}) \\
\overrightarrow{D} &= \left(4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 0, 4\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}, 4\cdot\frac{1}{2}\right) = (0, 2\sqrt{3}, 2)
\end{aligned} \tag{7}$$

Luego se obtiene la solución de $\overrightarrow{D} = \overrightarrow{A}\lambda_1 + \overrightarrow{B}\lambda_2 + \overrightarrow{C}\lambda_3$. Para este sistema, resulta más conveniente utilizar determinantes.

$$\begin{aligned}
\triangle &= \begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix} = 16\sqrt{3} - 16\sqrt{2} \\
\lambda_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 2\sqrt{3} & 2 & 2 \\ 2 & 2\sqrt{2} & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{16\sqrt{3} - 16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\
\lambda_2 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2\sqrt{3} & 2 \\ 2\sqrt{2} & 2 & 2\sqrt{3} \end{vmatrix}}{16\sqrt{3} - 16\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} \\
\lambda_3 &= \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 2 & 2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2} & 2\sqrt{2} & 2 \end{vmatrix}}{16\sqrt{3} - 16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - \sqrt{2}}
\end{aligned} \tag{8}$$

Luego las coordenadas en el sistema oblícuo son

$$\begin{aligned} \alpha = \lambda_1 \left|\overrightarrow{A}\right| &= \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ \beta = \lambda_2 \left|\overrightarrow{B}\right| &= \frac{4}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \\ \gamma = \lambda_3 \left|\overrightarrow{C}\right| &= \frac{4\left(\sqrt{2}\sqrt{3}-1\right)}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} \end{aligned} \tag{9}$$

$\boxed{5}$ 4. Hallar una base vectorial del conjunto de vectores $\overrightarrow{A} = \left(2, 2, \sqrt{2}\right)$, $\overrightarrow{B} = (2, 2, 2)$, $\overrightarrow{C} = \left(\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\sqrt{3}\right)$ y $\overrightarrow{D} = \left(2, -2, \sqrt{2}\right)$ y obtener la dimensión de dicha base.

Solución:

Verificamos las soluciones del sistema de ecuaciones $\overrightarrow{A}\lambda_1 + \overrightarrow{B}\lambda_2 + \overrightarrow{C}\lambda_3 + \overrightarrow{D}\lambda_4 = 0$

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_3 + 2\lambda_4 & = 0 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_3 - 2\lambda_4 & = 0 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\sqrt{3}\lambda_3 + \sqrt{2}\lambda_4 & = 0 \end{cases} \tag{10}$$

Este sistema de ecuaciones tiene infinitas soluciones. Si se fija arbitrariamente a $\lambda_4 = 1$ el sistema de ecuaciones queda como:

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_3 & = -2 \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_3 & = 2 \\ \sqrt{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\sqrt{3}\lambda_3 + \sqrt{2}\lambda_4 & = 0 \end{cases} \tag{11}$$

lo que la hace incompatible, porque las dos primeras ecuaciones no se pueden satisfacer. Significa que no se puede fijar λ_4. Probamos fijando arbitrariamente $\lambda_3 = 1$ obteniendo el sistema

$$\begin{cases} 2\lambda_1 + 2\lambda_2 + 2\lambda_4 & = -\sqrt{2} \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_4 & = -\sqrt{2} \\ \sqrt{2}\lambda_1 + 2\lambda_2 + \sqrt{2}\lambda_4 & = -2\sqrt{3} \end{cases} \tag{12}$$

Por medio del determinante

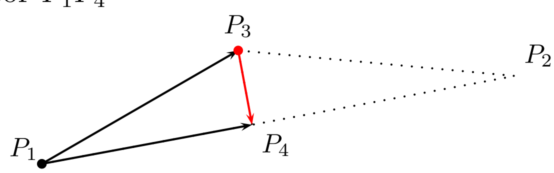
$$\triangle = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \\ \sqrt{2} & 2 & \sqrt{2} \end{vmatrix} \neq 0 \tag{13}$$

se demuestra que los vectores $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ y $\overrightarrow{D}$ forman una base vectorial de tres dimensiones.

$\boxed{2}$ 5. Dado los puntos $P_1(2,3,4)$, $P_2(4,5,5)$ y $P_3(3,4,4)$, halle la distancia mínima entre el punto P_3 y la recta que pasa por los puntos P_1 y P_2.

Solución:

Como se observa en el dibujo, se proyecta el vector $\overrightarrow{P_1P_3}$ sobre el vector $\overrightarrow{P_1P_2}$ para hallar el vector $\overrightarrow{P_1P_4}$



$$\begin{aligned}\overrightarrow{P_1P_2} &= (2,2,1)\\ \overrightarrow{P_1P_3} &= (1,1,0)\\ \overrightarrow{U_{P_1P_2}} &= \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)\end{aligned} \tag{14}$$

$$\left|\overrightarrow{P_1P_4}\right| = \left|\left(\overrightarrow{P_1P_3} \bullet \overrightarrow{U_{P_1P_2}}\right)\right| \cancelto{1}{\left|\overrightarrow{U_{P_1P_2}}\right|} = \frac{4}{3} \tag{15}$$

Hallamos $\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|$ por pitágoras

$$\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right|^2 = \left|\overrightarrow{P_1P_3}\right|^2 - \left|\overrightarrow{P_1P_4}\right|^2 = 2 - \frac{16}{9} = \frac{2}{9} \tag{16}$$

Finalmente $\left|\overrightarrow{P_3P_4}\right| = \sqrt{\frac{2}{9}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$.